2.30) a) $y' - y = 0$

Pol. característico asociado (Busco raíces):

$P(r) = r - 1$

raíz $\rightarrow$ $r = 1$.

Soluciones: $gen\{e^x\}$

$\boxed{y_h(x) = k.e^x}$

b) $y' - y = e^{2x}$

las sol. del homogéneo son las del a) $\rightarrow$ $y_h(x) = ke^x$.

Busco la particular para armar las sol. generales.

Como $F(x) = e^{2x}$, propongo la sol: ke^{2x}

La pongo en la ecuación:

$2ke^{2x} - ke^{2x} = e^{2x} \rightarrow ke^{2x} = e^{2x} \rightarrow k = 1$

Por lo tanto $y_p = e^{2x}$

y $y_G = y_p + y_h \rightarrow \boxed{y_G = e^{2x} + k.e^x}$

c) Mismas sol. homogéneas que antes $\rightarrow$ $y_H = k.e^x$

~~Como F(x)=~~

$y' - y = xe^{2x}$, como $F(x) = xe^{2x}$ propongo $y_p = (a_0 + a_1 x)\,e^{2x}$

$\rightarrow y_p = a_0 e^{2x} + a_1 x e^{2x}$

$\rightarrow$ en la ecuación:

$2a_0e^{2x} + a_1e^{2x} + 2a_1xe^{2x} - (a_0e^{2x} + a_1xe^{2x}) = xe^{2x} \rightarrow$

$\rightarrow a_0e^{2x} + a_1e^{2x} + a_1xe^{2x} = xe^{2x}$

$a_0 + a_1 = 0 \rightarrow a_0 = -1$ $\rightarrow$ $y_p = -e^{2x} + xe^{2x}$

$a_1 = 1$

$\rightarrow y_G = y_H + y_P \rightarrow \boxed{y_G = -e^{2x} + xe^{2x} + k.e^x}$

d) $y' - y = (3+5x)\, e^{2x}$

mismas sol. hom. que antes $\rightarrow y_H = k \cdot e^x$

Como $F(x) = (3+5x)\, e^{2x}$ propongo $y_P = (a_0 + a_1 x)\, e^{2x}$

en la ecuación:

$$\left(a_1 e^{2x} + 2(a_0 + a_1 x).e^{2x}\right) - (a_0 + a_1 x)e^{2x} = (3+5x)\, e^{2x}$$

$$a_1 e^{2x} + 2a_0 e^{2x} + 2a_1 x e^{2x} - a_0 e^{2x} - a_1 x e^{2x} = (3+5x)\, e^{2x}$$

$$\rightarrow e^{2x} \cdot (a_1 + 2a_0 + 2a_1 x - a_0 - a_1 x) = (3+5x)\, e^{2x}$$

$$\rightarrow e^{2x} \cdot (a_0 + a_1 + a_1 x) = (3+5x)\, e^{2x}$$

$\rightarrow a_0 + a_1 = 3 \rightarrow a_0 = -2$

$a_1 = 5$

$\rightarrow y_P = (-2+5x)\, e^{2x}$

Por lo tanto $y_G = y_P + y_H \rightarrow \boxed{y_G = (-2+5x)\, e^{2x} + k.e^x}$

e) $y'' - 2y' + y = (3+5x)e^{2x}$

Busco ~~[illegible]~~ sol. hom:

$P(r) = r^2 - 2r + 1$

$\frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$ → $r_1 = 1$, $r_2 = 1$

emtonces $y_H = k_1 . e^{x} + k_2 . x e^{x}$

Busco ~~[illegible]~~ sol. particular:

Como $F(x) = (3+5x)e^{2x}$ propongo $y_P = (a_0 + a_1 x)e^{2x}$

em la ecuacióm:

$y_P' = a_1 . e^{2x} + 2(a_0 + a_1 x)e^{2x} = a_1 e^{2x} + 2a_0 e^{2x} + 2a_1 x e^{2x}$

$y_P'' = 2a_1 e^{2x} + 4a_0 e^{2x} + 2a_1 . e^{2x} + 4a_1 x e^{2x}$

→ $y'' - 2y' + y = (3+5x)e^{2x}$

→ $(4a_1 e^{2x} + 4a_0 e^{2x} + 4a_1 x e^{2x}) - 2a_1 e^{2x} - 4a_0 e^{2x} - 4a_1 x e^{2x} + (a_0 + a_1 x)e^{2x} =$

$= (3+5x)e^{2x}$

→ $e^{2x}.(4a_1 + 4a_0 + 4a_1 x - 2a_1 - 4a_0 - 4a_1 x + a_0 + a_1 x) = (3+5x)e^{2x}$

→ $e^{2x}.(2a_1 + a_0 + a_1 x) = (3+5x)e^{2x}$

→ $a_0 + 2a_1 = 3$ → $a_0 = -7$

$a_1 = 5$

→ $y_P = (-7+5x)e^{2x}$

→ $y_G = y_P + y_H$ → $\boxed{y_G = (-7+5x)e^{2x} + k_1 e^{x} + k_2 . x e^{x}}$

F) $(D-I)^3[y] = (3+5x)e^{2x}$

$\to (D-I)[(D-I)[(D-I)[y]]] = (3+5x)e^{2x}$

$\to (D-I)[(D-I)[y'-y]] = (3+5x)e^{2x}$

$\to (D-I)[y''-2y'+y] = (3+5x)e^{2x}$

$\to y'''-2y''+y'-y''+2y'-y = (3+5x)e^{2x}$

$\to y'''-3y''+3y'-y = (3+5x)e^{2x}$

Busco sol. homogéneas:

$P(r) = r^3-3r^2+3r-1$

r_1	1	-3	3	-1
1		1	-2	1
	1	-2	1	0

$\to r^2-2r+1=0$

$\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}$ $\nearrow r_2=1$ $\searrow r_3=1$

Por lo tanto $y_H = k_1 . e^x + k_2 . xe^x + k_3 . x^2 e^x$

Ahora busco una particular:

Como $F(x) = (3+5x)e^{2x}$ Propongo $y_P = (a_0+a_1x)e^{2x}$

$y_P' = a_1e^{2x}+2(a_0+a_1x)e^{2x} = a_1e^{2x}+2a_0e^{2x}+2a_1xe^{2x} = e^{2x}.(a_1+2a_0+2a_1x)$

$y_P'' = 2a_1.e^{2x}+2(a_1+2a_0+2a_1x)e^{2x} = e^{2x}.(4a_1+4a_0+4a_1x)$

$y_P''' = 4a_1.e^{2x}+2(4a_1+4a_0+4a_1x)e^{2x} = e^{2x}.(12a_1+8a_0+8a_1x)$

→ en la ecuación:

$$e^{2x}(12a_1+8a_0+8a_1x)-e^{2x}\cdot(12a_1+12a_0+12a_1x)+e^{2x}(3a_1+6a_0+6a_1x)-e^{2x}(a_0+a_1x)=e^{2x}(3+5x)$$

$$\rightarrow e^{2x}(3a_1+a_0+a_1x)=e^{2x}(3+5x)$$

$$\rightarrow \quad 3a_1+a_0=3 \rightarrow a_0=-12$$

$$a_1=5$$

$$\rightarrow y_P=(-12+5x)e^{2x}$$

$$\rightarrow \boxed{y_G=y_P+y_H \rightarrow y_G=(-12+5x)e^{2x}+K_1e^{x}+K_2xe^{x}+K_3x^2e^{x}}$$